§ 2. Transformation de Laplace

<u>Déf. 1</u> Soit $f(t)$ une fonction $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$. La transformée de Laplace est défini par

(1) $$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

lorsque cette intégrale existe. (par exemple, pour les f décroissant à l'infini).

Propriétés:

1). Linéarité:

$$TL(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

2). Dérivation I:

$$TL(t\, f(t)) = -F'(s)$$

▼ Dériver (1) p.r. à s ▼

De la même manière,

$$TL(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

3). Dérivation II:

$$TL(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

▼ Intégration par parties:

$$TL(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty s e^{-st} f(t)\, dt =$$

$$= sF(s) - f(0) \quad ▼$$

De la même manière:

$$TL(f''(t)) = s\,TL(f') - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) =$$

$$= s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

$$TL(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

▼ Induction: vrai pour $n = 1$.

Supposons que pour $n = k$

$$TL(f^{(k)}(t)) = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$$

Alors pour $n = k+1$:

$$TL(f^{(k+1)}(t)) = s\,TL(f^{(k)}) - f^{(k)}(0) \quad ▼$$

4). Integration I.

$$TL\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$$

$$TL\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma = \int_s^\infty d\sigma \int_0^\infty dt\; e^{-t\sigma} f(t) =$$

$$= \int_0^\infty dt\; f(t) \int_s^\infty d\sigma\; e^{-t\sigma} = \int_0^\infty dt\; f(t)\, \frac{e^{-t\sigma}}{-t}\Big|_s^\infty$$

$$= \int_0^\infty dt\; \frac{f(t)}{t}\, e^{-st}$$

5). Integration II.

$$TL\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \int_0^\infty dt\; e^{-st} \int_0^t f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) \int_0^t f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left(\frac{e^{-st}}{-s} \int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty dt\; \frac{e^{-st}}{s} f(t) =$$

$$= \frac{1}{s} F(s).$$

6). $TL\left(e^{at} f(t)\right) =$

$$= \int_0^\infty dt\; e^{-st+at} f(t) = F(s-a).$$

$$TL\big(f(t-a)\,u(t-a)\big) = \int_0^\infty dt\; e^{-s(t-a)+sa} f(t-a)\,u(t-a)$$

$$\underbrace{}_{}\ "\ \begin{cases} 1 & \text{pour } t>a \\ 0 & \text{pour } t<a \end{cases}$$

$$= \int_{-a}^\infty dt'\; e^{-st'+sa} f(t')\,u(t') = e^{sa}\,F(s)$$

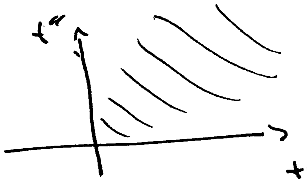
7). Convolution

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$TL(f*g) = \int_0^\infty dt\; e^{-st} \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau =$$

$$F(s)\, G(s) = \int_0^\infty dt'\; e^{-st'} f(t') \int_0^\infty dt''\; e^{-st''} g(t'') =$$

$$= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty dt'\, dt''\; e^{-s(t'+t'')}\; f(t')\, g(t'')$$



$$= \left| \begin{array}{l} t'+t'' = t''', \quad t''' \in [0,\infty) \\ t' \in [0, t'''] \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^\infty dt'''\; e^{-st'''} \int_0^{t'''} dt'\; f(t')\, g(t'''-t') = TL(f*g).$$

8). Changement d'échelle:

$$TL(f(at)) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

9). Pour les fonctions périodiques:

$$TL(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt +$$

$$+ \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\, dt + \dots =$$

$$= \left(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots\right) \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt =$$

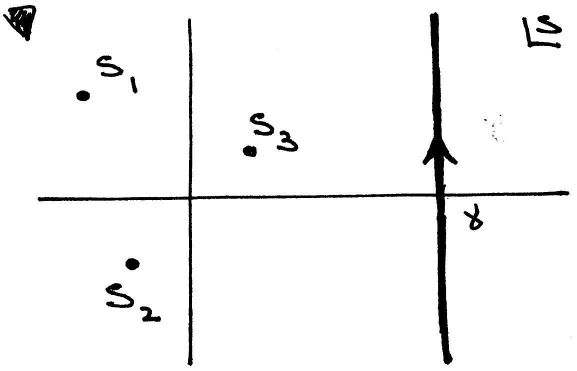
$$= \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

Thm. 2 Transformation inverse est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds$$

où γ est un nombre réel tel que $\forall k$ $\gamma > \mathrm{Re}\, s_k$, où $\{s_k\}$ sont les points singuliers de $F(s)$.

▼



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds\; e^{st} \int_0^\infty e^{-st'} f(t')\, dt' =$$

$$= \int_0^\infty dt' \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-t')}\, ds \right)}_{= \delta(t-t')} f(t') =$$

$$= f(t).$$ ▼

Exemple 3 Soit $f(t) = t$.

$$TL(f) = -\left[TL(1) \right]'_s = -\frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\, dt \right) =$$

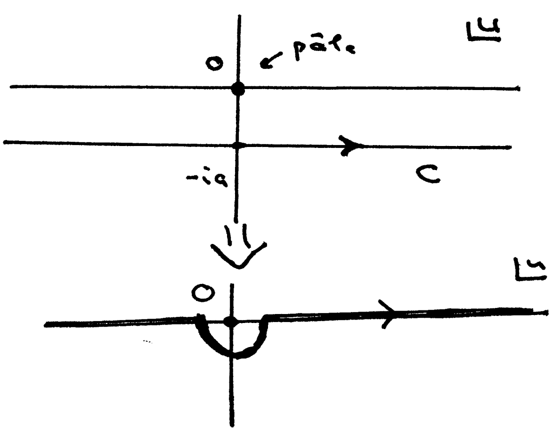
$$= -\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty \right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

singularités : $s = 0$ (pôle double)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a - i\infty}^{a + i\infty} \frac{1}{s^2} e^{st}\, ds = \left| \begin{matrix} s = iu \\ ds = i\,du \end{matrix} \right| =$$

$(a > 0)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} \frac{1}{(iu)^2} e^{iut}\, i\, du =$$



$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} \frac{e^{iut}}{u^2}\, du =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} i \operatorname*{res}_{u=0} \frac{e^{iut}}{u^2} =$$

$$= -i \operatorname*{res}_{u=0} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{it}{u} + \dots \right) = -i \cdot (it) = t.$$

Transformées de Laplace des fonctions élémentaires:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau s}$
$t^n/n!$	$1/s^{n+1}$
$t^n e^{-\alpha t}/n!$	$1/(s+\alpha)^{n+1}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Application à la résolution des EDOs linéaires:

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + \dots + a_0(x)\, y(x) = f(x)$$

- on applique la TL des 2 cotés
- l'équation peut éventuellement se simplifier en même devenir algébrique pour TL(y)

$$A(s)\, TL(y) = B(s) \Rightarrow TL(y) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- $y(x) = TL^{-1}\left(\frac{B(s)}{A(s)}\right)$

dans la pratique, on ne calcule pas $\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}$, mais on regarde les tableaux de TL.

Exemple 4.

Considérons l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \sin \omega t$$

munie des conditions initiales homogènes

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Notons $F(s)$ la transformée de Laplace de $x(t)$. Alors:

$$TL(\dot{x}(t)) = \left| \begin{array}{c}\text{d'après les formules}\\ \text{de dérivation}\end{array} \right| = sF(s) - \underbrace{x(0)}_{0} = sF(s)$$

$$TL(\ddot{x}(t)) = \text{——} \text{ " } \text{——} = s^2 F(s) - s\underbrace{x(0)}_{0} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{0} = s^2 F(s)$$

$$TL(f_0 \sin \omega t) = \left| \begin{array}{c}\text{d'après le}\\ \text{tableaux}\end{array} \right| = f_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Donc, en appliquant la transformation de Laplace à notre équation, on obtient

$$s^2 F(s) + \omega_0^2 F(s) = f_0 \omega \frac{1}{s^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow F(s) = f_0 \omega \frac{1}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}.$$

Ensuite on cherche la transformation inverse. Pour pouvoir utiliser le tableau, on écrit d'abord

$$\frac{1}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{A}{s^2+\omega_0^2} + \frac{B}{s^2+\omega^2} = \frac{(A+B)s^2+(A\omega^2+B\omega_0^2)}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}$$

où A, B sont à déterminer. Ceci donne un système

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A\omega^2+B\omega_0^2=1 \end{cases} \Rightarrow A(\omega^2-\omega_0^2)=1 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} \\ B = -\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} \end{cases}$$

Donc

$$F(s) = f_0\omega \left\{ \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} \frac{1}{s^2+\omega_0^2} - \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} \frac{1}{s^2+\omega^2} \right\} =$$

$$= f_0\omega \left\{ \frac{1}{\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)} \underbrace{\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}}_{=TL(\sin\omega_0 t)} - \frac{1}{\omega(\omega^2-\omega_0^2)} \underbrace{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}}_{=TL(\sin\omega t)} \right\}$$

ce qui donne finalement

$$x(t) = TL^{-1}(F(s)) = \frac{f_0\omega}{\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)} \sin\omega_0 t - \frac{f_0}{\omega^2-\omega_0^2} \sin\omega t =$$

$$= \frac{f_0}{\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)} \left[\omega \sin\omega_0 t - \omega_0 \sin\omega t \right].$$

Cette réponse peut également être vérifiée par calcul direct.